ECUACIONES DE MOVIMIENTO

(PRÁCTICA 4: LEYES DEL MOVIMIENTO)

Ing. Francisco Franco – Web: http://mgfranciscofranco.blogspot.com/

Fuente de información: Trabajo de grado de Mónica A. Camacho D. y Wilson H. Imbachi M.

Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

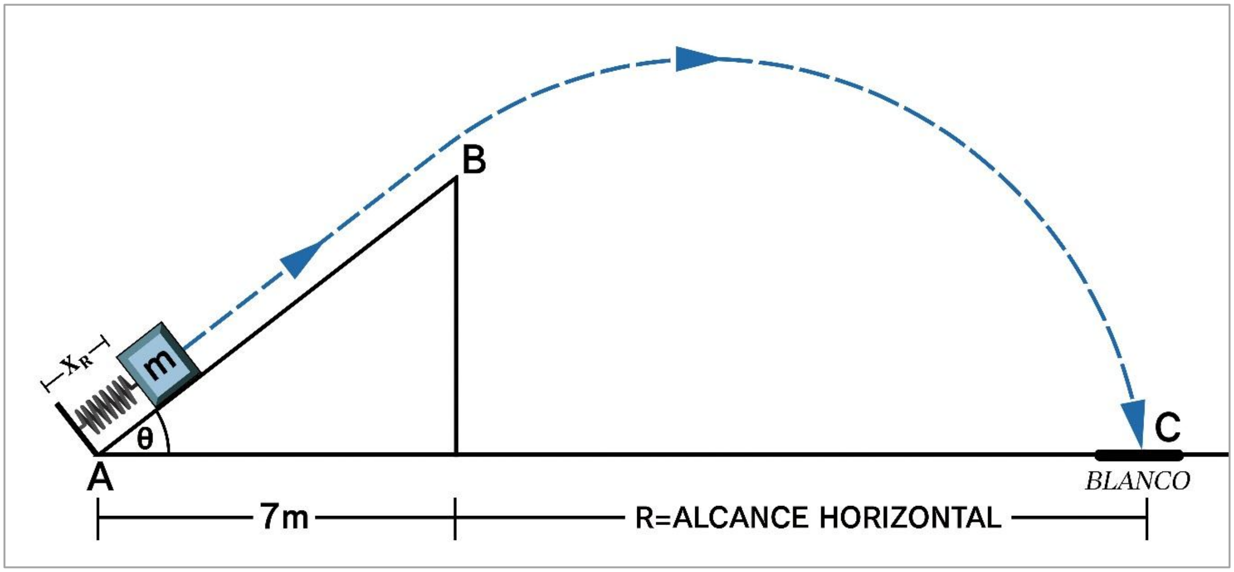

Figura 12. Leyes del movimiento – Sistema general.

La figura 12 muestra el esquema diseñado para la práctica de leyes del movimiento. Las ecuaciones que definen el movimiento del bloque a través de la rampa inclinada (con y sin resorte) y dentro de la trayectoria parabólica se muestran a continuación:

4.1. Sistema masa-resorte (Tramo A-A'):

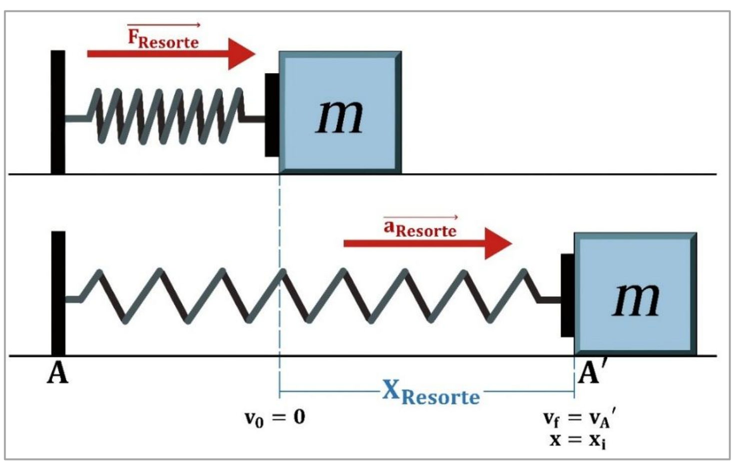

Figura 13. Longitud de compresión del resorte.

Dentro del plano inclinado se debe considerar en primera instancia el movimiento del bloque unido al resorte (tramo A-A') como resultado de la fuerza que este genera sobre el cuerpo debido al proceso de compresión inicial. La longitud que recorren ambos es igual a la distancia de compresión del resorte ($X_{Resorte}$), ya que al llegar a la posición de reposo del muelle ($x = x_i$) el bloque se separa y continúa su movimiento solo.

Al momento de ejercer la fuerza de compresión y alcanzar la longitud deseada ($X_{Resorte}$) el bloque tiene una velocidad inicial $v_0 = 0m/s$ (punto A). Cuando esta fuerza desaparece inicia el movimiento del sistema masa-resorte con un valor de aceleración dada por la fuerza con que el muelle empuja al cuerpo, como se muestra en la figura 13. Al llegar al punto de reposo (punto A') el bloque alcanza una velocidad $v = v_A{}'$ dada por la siguiente expresión:

$$v_f{}^2 - v_0{}^2 = 2as$$

$$v_f{}^2 - v_0{}^2 = 2a_{\mathrm{Re}sorte} x_{\mathrm{Re}sorte}$$

$$v_f{}^2 = 2a_{\mathrm{Re}sorte} x_{\mathrm{Re}sorte}$$

$$v_f = v_{A'} = \sqrt{2a_{\mathrm{Re}sorte} x_{\mathrm{Re}sorte}} \tag{74}$$

La aceleración en el movimiento del sistema masa-resorte se determina con base en las fuerzas que actúan sobre el bloque dentro del tramo A-A'. De acuerdo a la figura 14 las fuerzas presentes son la fuerza normal (N), la fuerza de fricción de la superficie (F_R), el peso del bloque (P) y la fuerza del resorte ($F_{Resorte}$).

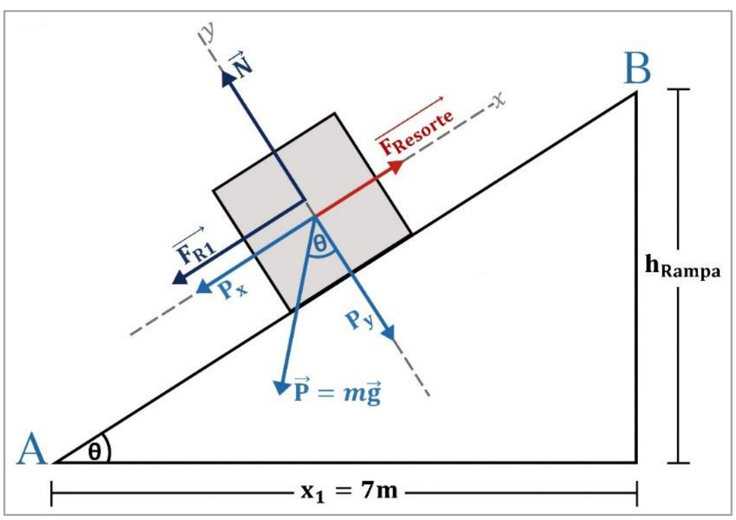

Figura 14. Fuerzas presentes en el sistema masa-resorte.

Las componentes del peso en dirección x y y respectivamente son:

$$P_x = mg\sin\theta$$

$$P_y = mg\cos\theta$$

Con base en la segunda ley de Newton se hallan las expresiones generales de fuerza normal (N) y aceleración ($a_{Resorte}$) dentro del movimiento del sistema masa-resorte. En la dirección y se tiene:

$$\sum F_y = N - mg\cos\theta = 0$$

$$N = mg\cos\theta \tag{75}$$

Mientras que en la dirección x:

$$\sum F_x = F_{\text{Re}sorte} - P_x - F_R = ma_{\text{Re}sorte}$$

$$kx_{\text{Re}sorte} - mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma_{\text{Re}sorte}$$

$$a_{\text{Re}sorte} = \frac{kx_{\text{Re}sorte} - mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{m}$$

$$a_{\text{Re}sorte} = \frac{kx_{\text{Re}sorte}}{m} - g(\sin\theta + \mu\cos\theta) \tag{76}$$

4.2. Movimiento del bloque sobre el plano inclinado: Sin resorte (Tramo A'-B):

Dependiendo de la distancia de compresión del resorte el bloque continúa su movimiento desde la posición de reposo del muelle (punto A') hasta el final del plano inclinado (punto B), como se muestra en la figura 15. Se considera que el recorrido total dentro de la rampa es igual a L (despreciando la longitud que el resorte en reposo le quita al plano inclinado), por lo tanto dado que en el movimiento del bloque unido al resorte se recorrió una distancia igual a la longitud de compresión del muelle ($X_{Resorte}$), para este caso el recorrido equivale a $L - X_{Resorte}$.

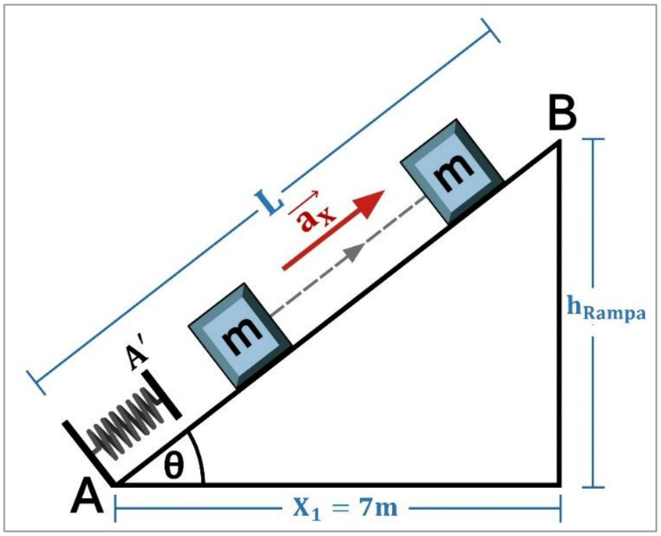

Figura 15. Movimiento del bloque sobre el plano inclinado

Conociendo el valor de la base de la rampa ($x_1 = 7m$) se calcula la medida de su altura y la longitud del segmento AB de la siguiente forma:

$$h_{Rampa} = x_1 \tan\theta \tag{77}$$

$$L = \frac{x_1}{\cos\theta} \tag{78}$$

De acuerdo a la figura 15 el bloque se mueve dentro del tramo A’-B con un valor de aceleración $a = a_x$. Esta aceleración está definida por las mismas fuerzas presentes en el sistema anterior (sistema masa-resorte), exceptuando la fuerza del resorte ($F_{Resorte}$), la cual no tiene incidencia dentro de este movimiento, como se muestra en la figura 16.

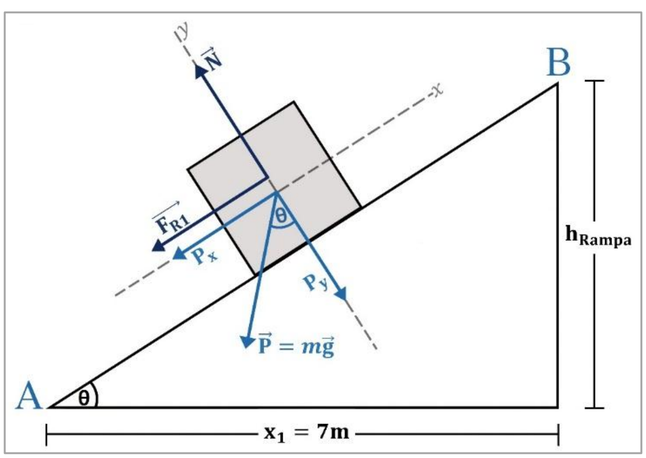

Figura 16. Fuerzas presentes en el bloque (plano inclinado).

Partiendo de la segunda ley de Newton y considerando que no hay movimiento en dirección y dentro del sistema coordenado escogido, la aceleración $a = a_x$ equivale a:

$$\sum F_x = -P_x - F_R = ma_x$$

$$-mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma_x$$

$$a_x = \frac{-mg\left(\sin\theta + \mu\cos\theta\right)}{m}$$

$$a_x = -g\left(\sin\theta + \mu\cos\theta\right) \tag{79}$$

Se considera que la velocidad inicial del bloque para este movimiento equivale a su velocidad final dentro del tramo A-A', es decir:

$$v_0 = v_{A'} = \sqrt{2a_{\mathrm{Re}sorte}x_{\mathrm{Re}sorte}} \tag{80}$$

Una vez calculado este valor se obtiene la ecuación de velocidad del bloque en el punto B:

$$v_f^{\,2} - v_0^{\,2} = 2as$$

$$v_f^{\,2} - v_{A'}^{\,2} = 2a_x\left(L - x_{\mathrm{Re}sorte}\right)$$

$$v_f^{\,2} = 2a_x\left(L - x_{\mathrm{Re}sorte}\right) + v_{A'}^{\,2}$$

$$v_f = v_B = \sqrt{2a_x\left(L - x_{\mathrm{Re}sorte}\right) + 2a_{\mathrm{Re}sorte}x_{\mathrm{Re}sorte}} \tag{81}$$

A partir de la ecuación (81) se determina el valor de constante elástica del resorte (K) necesaria para que el bloque recorra toda la longitud de la rampa:

$$2a_x\left(L - x_{\mathrm{Re}sorte}\right) + 2a_{\mathrm{Re}sorte}x_{\mathrm{Re}sorte} > 0$$

Reemplazando la expresión de aceleración se encuentra el valor de la constante K requerida:

$$-2g(\sin\theta+\mu\cos\theta)(L-x_{\text{Resorte}})+2x_{\text{Resorte}}\left[\frac{kx_{\text{Resorte}}}{m}-g(\sin\theta+\mu\cos\theta)\right]>0$$

$$-2g(\sin\theta+\mu\cos\theta)L+2g(\sin\theta+\mu\cos\theta)x_{\text{Resorte}}+\frac{2kx^2_{\text{Resorte}}}{m}$$
$$-2x_{\text{Resorte}}g(\sin\theta+\mu\cos\theta)>0$$

$$-2g(\sin\theta+\mu\cos\theta)L+\frac{2kx^2_{\text{Resorte}}}{m}>0$$

$$\frac{2kx^2_{\text{Resorte}}}{m}>2g(\sin\theta+\mu\cos\theta)L$$

$$k>\frac{2gmL(\sin\theta+\mu\cos\theta)}{2x^2_{\text{Resorte}}} \quad \textbf{(82)}$$

4.3. Movimiento parabólico del bloque (Tramo B-C):

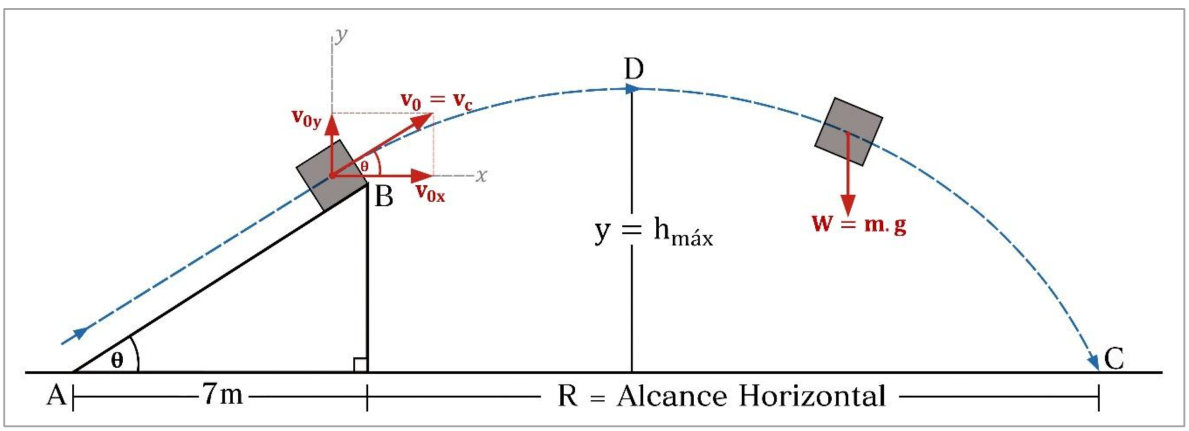

Figura 17. Movimiento parabólico.

Cuando la distancia de compresión del resorte para un valor de K definido es la correcta se logra que el bloque atraviese por completo el plano inclinado, llegando incluso más allá del límite de la rampa. En este caso el cuerpo realiza un movimiento parabólico debido a la inclinación del plano por el que acaba de desplazarse, como lo muestra la figura 17. Dado que este tipo de movimiento ya fue estudiado en la sección 2.4 se deducen las mismas expresiones generales para los diferentes parámetros del subsistema. Por lo tanto dichas ecuaciones son las siguientes:

Componentes de velocidad en x y y al inicio del movimiento parabólico:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = v_B \cos\theta \tag{83}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta = v_B \sin\theta \tag{84}$$

Componentes de aceleración en x y y:

$$a_x = 0 \tag{85}$$

$$a_y = -g \tag{86}$$

Componentes de velocidad en dirección x y y respectivamente:

$$v_x = v_B \cos\theta \tag{87}$$

$$v_y = -gt + v_B \sin\theta \tag{88}$$

Ecuaciones de posición en x y y del bloque durante el movimiento parabólico:

$$x = v_B \cos\theta t \tag{89}$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_B \sin\theta t + h_{rampa} \tag{90}$$

Altura máxima ($h_{máx}$) alcanzada por el bloque dentro del movimiento parabólico y el tiempo (t_D) empleado en llegar hasta dicha posición:

$$t_D = \frac{v_B \sin\theta}{g} \tag{89}$$

$$h_{máx} = \frac{v_B{}^2 \sin^2\theta}{2g} + h_{rampa} \tag{90}$$

Alcance horizontal (R) y el tiempo (t_C) empleado por el bloque para llegar a tal posición:

$$t_C = \frac{v_B}{g}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh_{rampa}}{{v_B}^2}} \right) \tag{91}$$

$$R = \frac{{v_B}^2}{g}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh_{rampa}}{{v_B}^2}} \right)\cos\theta \tag{92}$$